ESAME DI CPS
PRIMA PROVA SCRITTA
05/06/2012

Cognome	
Nome	
Matricola	

	1	2	3	Σ
Punteggio				

(1) Lanciamo una moneta ripetutamente e poniamo $X_i = 1$ se l'i-esimo lancio ha dato testa e $X_i = 0$ altrimenti. Consideriamo le variabili X e Y date da $X = \min\{i : X_{i-1} = X_i\}$ e $Y = \min\{i : X_{i-1} = X_i = 1\}$. Ad esempio ottenendo una sequenza 1001011 abbiamo $X = 3$ e $Y = 7$.

(a) Determinare $P(X_i = X_{i-1}$ per ogni $i > 1$.
(b) Determinare le densità della variabile X;
(c) Determinare la media della variabile X;
(d) (*) Detto a_i il numero di sequenze binarie di lunghezza i in cui 1 non compare mai 2 volte consecutivamente, dimostrare che $a_{i+2} = a_{i+1} + a_i$, per $i \geq 1$.
(e) Determinare esplicitamente a_1, a_2, a_3, a_4, a_5.
(f) Dimostrare che la densità di Y è data da $p_Y(k) = \frac{a_{k-3}}{2^k}$ per $k > 3$
(g) Utilizzare (e) ed (f) per determinare $p_Y(k)$ per $k \leq 8$;
(h) (*) Dimostrare che mediamente occorrono almeno 5 lanci per ottenere 2 teste consecutive.

Soluzione (1) (a)Ad ogni lancio, con eccezione del primo, la probabilità di ottenere un risultato uguale al precedente è sempre $\frac{1}{2}$ (b) Siccome la probabilità che un lancio sia uguale al precedente è indipendente dai lanci precedenti, segue da (a) che $X - 1 \sim \tilde{G}(\frac{1}{2})$.
(c) Essendo $X - 1 \sim \tilde{G}(\frac{1}{2})$ abbiamo che $E[X] = E[X - 1] + 1 = 2 + 1 = 3$.
(d) Consideriamo le sequenze di lunghezza $i + 2$ in cui non compaiono mai 2 teste consecutive. Le suddividiamo in 2 sottoinsiemi, quelle che finiscono con testa e quelle che finiscono con croce. Quelle che finiscono con croce hanno nei primi $i + 1$ posti una qualunque sequenza di teste e croci senza teste consecutive e quindi sono a_{i+1}. Quelle che finiscono con testa hanno necessariamente croce nel posto $i + 1$ e una qualunque sequenze nel primi i posti e quindi sono proprio a_i.
(e) Si ha facilmente $a_1 = 2$ e $a_2 = 3$. Dal punto precedente otteniamo quindi $a_3 = 5$, $a_4 = 8$, $a_5 = 13$.
(f) Il numero di sequenze possibili di lunghezza k è 2^k. Le sequenze di lunghezza k ($k \geq 3$) che hanno 2 teste consecutive per la prima volta nei posti $k - 1$ e k sono sequenze che finiscono con CTT e hanno nei primi $k - 3$ posti una qualunque sequenza che non ha

mai 2 teste consecutive. Sono quindi a_{k-3}. Otteniamo quindi $p(k) = \frac{a_{k-3}}{2^k}$ per $k > 3$ (g)
$p_Y(2) = \dfrac{1}{4}$, $p_Y(3) = \dfrac{1}{8}$ $p_Y(4) = \dfrac{a_1}{2^4} = \dfrac{1}{8}$, $p_Y(5) = \dfrac{a_2}{2^5} = \dfrac{3}{32}$, $p_Y(6) = \dfrac{5}{64}$, $p_Y(7) = \dfrac{1}{16}$, $p_Y(8) = \dfrac{13}{256}$.

(h) Dal punto (g) abbiamo che $P(Y \geq 9) = 1 - (p(2) + \cdots + p(8)) = 0.215$ e quindi

$$E[Y] = \sum_{k=2}^{\infty} kp(k) = \sum_{k=2}^{8} kp(k) + \sum_{k=9}^{\infty} kp(k) \geq \sum_{k=2}^{8} kp(k) + \sum_{k=9}^{\infty} 9p(k)$$
$$= 2\frac{1}{4} + 3\frac{1}{8} + 4\frac{1}{8} + \cdots + 8\frac{13}{256} + 9 \cdot 0.215 = 5.09.$$

(2) Una squadra di calcio vince con probabilità $\frac{1}{2}$ e pareggia con probabilità $\frac{1}{4}$.
  (a) Giocando 30 partite in un campionato, qual è la probabilità che ne vinca esattamente 15?
  (b) E che ne vinca più di 15?
  (c) Qual è la probabilità che faccia almeno 50 punti?

(2) (a) Il numero X di vittorie segue ha una densità binomiale $B(30, \frac{1}{2})$ e quindi

$$P(X = 15) = \binom{30}{15} 2^{30} = 0,144.$$

(b) Approssimiamo la variabile X con una variabile normale $\zeta \sim N(15, \frac{15}{2})$ e calcoliamo quindi

$$P(X > 15) = P(\zeta \geq 15.5) = P(\zeta_0 > \frac{15.5 - 15}{\sqrt{7.5}} = P(\zeta_0 > 0.18) = 1 - \Phi(0.18) = 1 - 0.57142 = 0.42858.$$

In alternativa, senza ricorrere all'approssimazione normale si poteva risolvere sfruttando la simmetria del problema: la probabilità di ottenere più di 15 vittorie è uguale alla probabilità di ottenere meno di 15 vittorie. E siccome $P(X < 15) + P(X = 15) + P(X > 15) = 1$ otteniamo

$$P(X > 15) = \frac{1 - P(X = 15)}{2} = \frac{1 - 0.144}{2} = 0.428,$$

esattamente lo stesso risultato!

(c) Detto Y_i i punti conquistati in ogni partita abbiamo che la densità delle Y_i è la seguente

$$p_Y(k) = \begin{cases} \frac{1}{2} & k = 3 \\ \frac{1}{4} & k = 1 \\ \frac{1}{4} & k = 0 \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

Abbiamo quindi $E[Y_i] = 3\frac{1}{2} + 1\frac{1}{4} = \frac{7}{4}$ e $E[Y_i^2] = 9\frac{1}{2} + 1\frac{1}{4} = \frac{19}{4}$ e quindi $\text{Var}(Y_i) = E[Y_i^2] - E[Y_i]^2 = \frac{19}{4} - \frac{49}{16} = \frac{27}{16}$. La variabile somma di punti $S_{30} = Y_1 + \cdots + Y_{30}$ per il teorema del llimite centrale è unva variabile approssimativamente normale di media $E[S_{30}] = 30\frac{7}{4} = 52.5$ e varianza $\text{Var}(S_{30}) = 30 \cdot \frac{27}{16} = 50.625$. Utilizzando ancora la correzione di continuità abbiamo

$$P(S_{30} \geq 50) = P(\zeta > 49.5) = P(\zeta_0 > \frac{49.5 - 52.5}{\sqrt{50,625}} = P(\zeta_0 > -0.42) = \Phi(0.42) = 0.66276$$